בפרקים הקודמים...

כך ש:

* ⇦
* ⇦

כך ש:

* לכל A
* אם זרים בזוגות,

## B – אלגברת בורל

הσ-אלגברה הקטנה ביותר על הכוללת את כל הקטעים הפתוחים.  
⇦ B כוללת כל: קטע  
 קרן  
 קבוצה סופית או בת מניה

## הערה

B היא גם הσ-אלגברה הקטנה ביותר הכוללת את הקרניים

### הוכחה

מספיק להראות שכל קטע פתוח נמצא שם:

# ועכשיו...

# הגדרה

משתנה מקרי על מרחב הסתברות הוא פונקציה כך שלכל ,  
כך יש משמעות ל

כדי ש מספיק ש לכל b

# בעיה

איך לתאר משתנה מקרי? כשהיה לנו מרחב בדיד יכולנו להשתמש בטבלה או בנוסחא, אבל עכשיו המרחב גדול מדי בשביל להשתמש בנוסחאות באופן ישיר.

# הגדרה

פונקציה נקראת פונקציית הצטברות אם

* F מונוטונית עולה(במובן החלש – לא יורדת)
* F רציפה מימין(כלומר יכולות להיות לה רק נקודות אי רציפות סליקות, כך ש)

# טענה 1

יהי X מ"מ על מרחב כלשהו, אז היא פונקציית הצטברות

## הוכחה

יהיו , אז .

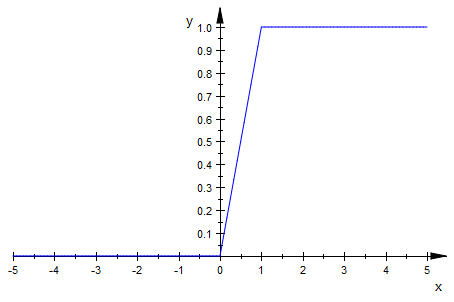
# טענה 2

תהי F פונקציית הצטברות, אז קיים מ"מ (ביחס לσ-אלגברות B וB) כך ש (X הוא פונקציית הזהות)

## הוכחה

B אכן σ-אלגברה על . הזהות היא אכן מ"מ. לכל , . צריך להוכיח שP המוגדרת לפי הנוסחה מקיימת את האקסיומות הדרושות:  
והתכונה על האיחוד(לא נוכיח)

# דוגמה

 *זו פונקציית הצטברות, ולכן היא מגדירה X כך ש  
לכל ,*

# תכונות בסיסיות של X המוגדרות על ידי פונקציית הצטברות F:

## מסקנה

F רציפה ⬄

## דוגמה

מה פונקציית ההצטברות של משתנה מקרי פואסוני?

# הערות על פונקציות הצטברות

1. לפונקצית הצטברות יש לכל היותר נקודות אי רציפות.
2. ייתכן שלפונקציה יהיו נקודות שבהן היא אינה גזירה(פונקציית קנטור).
3. מידת קבוצת נקודות אי הגזירות היא אפס(משפט לֶבג)

נניח שF גזירה.

# הגדרה

פונקציה נקראת פונקציית צפיפות אם

# טענה

תהי f פונקציית צפיפות. היא פונקציית הצטברות(גזירה)

## הוכחה

## הערה

אם F פונקציית הצטברות גזירה, אז היא פונקציית צפיפות:  
 כי F מונוטונית.

# דוגמה

נניח . נתאר מ"מ עם התפלגות אחידה בקטע :  
*פונק' ההצטברות המתאימה היא*

*נניח .*

# באופן כללי

לכל מ"מ X,

בפרט

# הגדרה

התוחלת של מ"מ X בעל צפיפות היא

*באופן כללי,*

## למשל

# דוגמה